EX 17 :

1) $(\zeta_f)\cap(Ox)=\{A,B\}$

Désignons x_1 et x_2 les abscisses respectifs de A et B avec $x_1<x_2$.

$f(x_1)=0$; $f(x_2)=0$

f est continue sur$[x_1,x_2]$ dérivable sur $]x_1,x_2[$ et $f(x_1)=f(x_2)=0$

d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel $c\in]x_1,x_2[$ tel que : $f'(c)=0$

(ζ_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse c

2) $(\zeta_f)\cap(Ox)=\{A_1,A_2,.....,A_n\}$

designons par $x_1,x_2,.....,x_n$ les abscisses respectifs de $A_1,A_2,.....,A_n$

avec $x_1<x_2<....<x_n$

f est dérivable sur $[x_i,x_{i+1}]$

$f(x_i)=f(x_{i+1})=0$

d'où il existe au moins un réel $c_i\in]x_i,x_{i+1}[$

tq $f'(c_i)=0$

par suite l'équation f'(x)=0 admet au moins (n-1) solutions

(ζ) admet au moins (n-1) tangentes horizontales

EX 18 :

f dérivable sur [-2,-1]

f(-2)=f(-1)=0

d'après le théorème de Rolle il existe au moins un réel $c_1\in]-2,-1[$ tq : $f'(c_1)=0$

de même : il existe au moins un réel $x_2\in]-1,1[$ tq $f'(c_2)=0$

et un réel $c_3\in]1,2[$ tq $f'(c_3)=0$

par suite l'équation f'(x)=0 admet au moins trois solutions

EX 19 :

Soit k un entier avec $1\le k\le n$

$f^{(k)}$: la dérivée $k^{ième}$ de f.

montrons par récurrence sur k que :

$f^{(k)}$ s'annule pour (n+1-k) valeurs distincts de [a,b]

* pour k=1 :

f s'annule (n+1) fois d'après l'exercice n°1

f' : s'annule n fois

$f^{(1)}$: s'annule pour (n+1-1) valeurs distincts de [a,b] (vrai)

* supposons que $f^{(k)}$ s'annule (n+1-k) fois

* montrons que : $f^{(k+1)}$ s'annule (n-k) fois

D'après l'ex 17 : $f^{(k+1)}=(f^{(k)})'$ s'annule ((n+1-k)-1) fois

$\Rightarrow f^{(k+1)}$ s'annule (n-k) fois

Conclusion : $f^{(k)}$ s'annule au moins pour (n+1-k) valeurs distincts de [a,b]

$\forall k\in\{1,2,...,n\}$

* pour k=n , $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur [a,b]

EX 20 :

1. la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est continue sur IR^*

la fonction sinus est continue sur IR

d'où la fonction $x\mapsto\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur IR^*

par suite f est continue sur IR^* comme étant produit des fonctions continues.

*Etude de continuité de f en 0

$$pour\ x\neq 0\ on\ a\ -1\le\sin(\frac{1}{x})\le 1$$

$$\Rightarrow -x^2\le f(x)\le x^2$$

$$Or\ \lim_{x\to 0}x^2=\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$$

$$d'où\ \lim_{x\to 0}f(x)=0$$

D'où f est continue en 0

Conclusion : f est continue sur IR

2. a/

$$pour\ x\neq 0\ \left|\sin(\frac{1}{x})\right|\le 1$$

$$\Rightarrow\left|x\sin(\frac{1}{x})\right|\le|x|\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x|$$

Qarray.tn Aqra Blech Qarray.tn